部分分数分解の可能性について

代数学の基本定理「複素係数の 1 次以上の整方程式は必ず解を持つ」から，
分母が$(x-\alpha)^m$と$(x^2+ax+b)^n$の形の積に因数分解されることが証明できる。

(a)　実係数の整式 $q(x)$ は，$q(x)=0$ が $x=\alpha$ を解に持てば，$x-\alpha$ で割り切れて，その商は実係数の整式である。

(b)　実係数の整式 $q(x)$ は，$q(x)=0$ が $x=\beta$（$=s+ti$（s，t は定数））を解に持てば，$x=\overline{\beta}$（$=s-ti$）も解に持つから，$(x-\beta)(x-\overline{\beta})=x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}=x^2-2sx+s^2+t^2$ で割り切れて，その商は実係数の整式である。

(a)，(b)を繰り返すことにより，

$$q(x)=c(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}(x^2+a_1x+b_1)^{n_1}(x^2+a_2x+b_2)^{n_2}\square(x^2+a_lx+b_l)^{n_l}$$

と因数分解できることがわかる。

次に，分数式 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$（$(p(x)$の次数$)<(q(x)$の次数$)$）の部分分数分解の可能性について示そう。

(c)　$q(x)=(x-\alpha)^m q_1(x)$，$q_1(\alpha)\neq 0$ とする。改めて $p_1(x)=p(x)$とおき，$A_1=\dfrac{p_1(\alpha)}{q_1(\alpha)}$ と定めると，$p_1(\alpha)-A_1q_1(\alpha)=0$ より，$p_1(x)-A_1q_1(x)=(x-\alpha)p_2(x)$ とおける。よって，

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p_1(x)}{q(x)}=\frac{A_1q_1(x)+(x-\alpha)p_2(x)}{(x-\alpha)^m q_1(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)^m}+\frac{p_2(x)}{(x-\alpha)^{m-1}q_1(x)}$$

と変形できる。これを $m-1$ 回繰り返すことにより，

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)^m}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{m-1}}+\cdots\cdots+\frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^2}+\frac{A_m}{x-\alpha}+\frac{p_{m+1}(x)}{q_1(x)}$$

となり，$p_{m+1}(x)$の次数$<q_1(x)$の次数　であることもわかる。

(d)　$q(x)=\{(x-s)^2+t^2\}^n q_2(x)$，$q_2(s\pm ti)\neq 0$，$t\neq 0$ とする。改めて $r_1(x)=p(x)$とおき，$B_1(s\pm ti)+C_1=\dfrac{r_1(s\pm ti)}{q_2(s\pm ti)}$ と定めると，$r_1(s\pm ti)-\{B_1(s\pm ti)+C_1\}q_2(s\pm ti)=0$ より，

$r_1(x)-\{B_1x+C_1\}q_2(x)=\{(x-s)^2+t^2\}r_2(x)$　とおける。よって，

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{r_1(x)}{q(x)}&=\frac{(B_1x+C_1)q_2(x)+\{(x-s)^2+t^2\}r_2(x)}{\{(x-s)^2+t^2\}^n q_2(x)}\\&=\frac{B_1x+C_1}{\{(x-s)^2+t^2\}^n}+\frac{r_2(x)}{\{(x-s)^2+t^2\}^{n-1}q_2(x)}\end{aligned}$$

と変形できる。これを $n-1$ 回繰り返すことにより，

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{B_1x+C_1}{\{(x-s)^2+t^2\}^n}+\frac{B_2x+C_2}{\{(x-s)^2+t^2\}^{n-1}}+\cdots\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x-s)^2+t^2}+\frac{r_{n+1}(x)}{q_2(x)}$$

となる。

以上から，部分分数分解に分解することが可能であることがわかる。